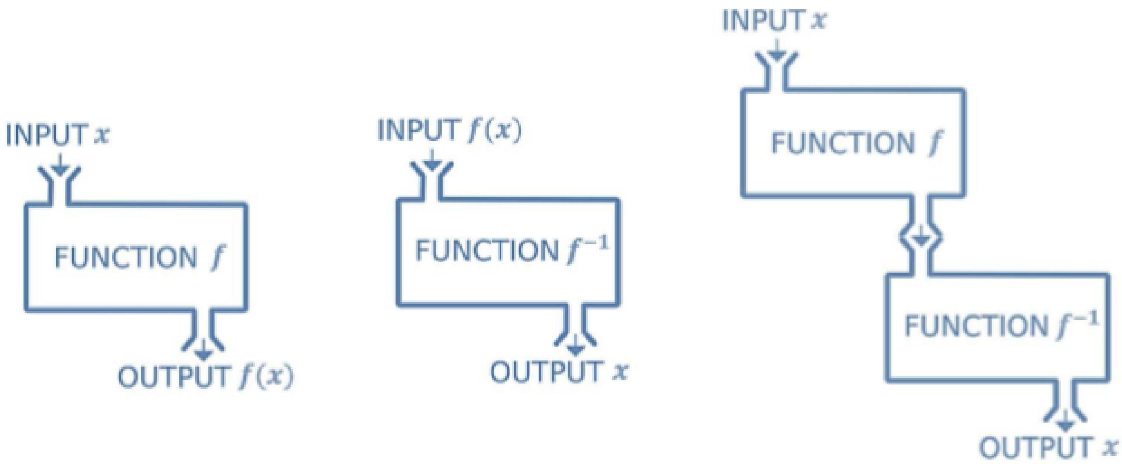
UAA 5 :

Fonctions réciproques et cyclométriques



On a eu, à maintes reprises, l'occasion de voir qu'une fonction permet d'exprimer une grandeur en fonction d'une autre : la vitesse en fonction du temps, le bénéfice en fonction de la quantité produite, le volume d'un gaz en fonction de sa pression, la demande en fonction du prix de vente, ...

Mais, dans toutes ces circonstances, il peut être utile de regarder la relation entre ces deux grandeurs dans l'autre sens : le temps en fonction de la vitesse, la quantité à produire en fonction du bénéfice que l'on veut obtenir, la pression du gaz en fonction de son volume, le prix de vente en fonction de la demande souhaitée. Est-ce toujours possible ? C'est une question à laquelle on tâchera de répondre dans ce chapitre.

Dans le cadre de cette problématique, on s'intéressera particulièrement aux fonctions trigonométriques. A partir de celles-ci, on tentera de créer des fonctions fournissant un angle en fonction de la valeur de son sinus, de son cosinus ou de sa tangente : les fonctions cyclométriques.

Objectifs : Fonctions réciproques et cyclométriques $6^{ème}$ 6h

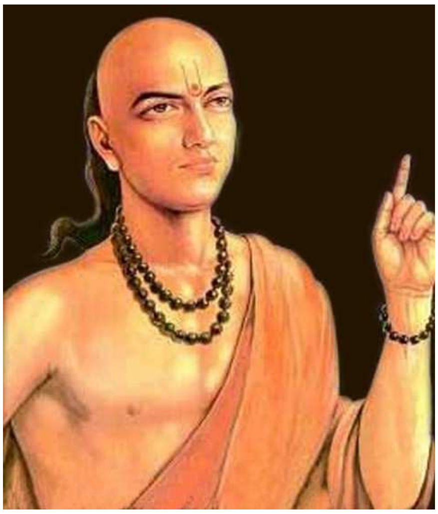
L'élève doit ***SAVOIR :***

1. Expliquer ce qu'est une fonction injective.
2. Expliquer ce qu'est une fonction surjective.
3. Expliquer ce qu'est une fonction bijective.
4. Expliquer ce qu'est une fonction réciproque.
5. Expliquer le lien graphique entre une fonction et sa réciproque.
6. Donner la formule de la dérivée d'une fonction réciproque.
7. Pour chaque fonction cyclométrique, donner son domaine de définition, son ensemble-image, sa définition, son graphique, sa dérivée et démontrer cette dérivée.
8. Enoncer la règle de l'Hospital et la démontrer.

L'élève doit ***ETRE CAPABLE DE :***

1. Tracer la réciproque d'une fonction.
2. Déterminer l'expression analytique de la réciproque d'une fonction ainsi que son domaine.
3. Restreindre le domaine d'une fonction pour que sa réciproque soit aussi une fonction.
4. Calculer une image en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction réciproque.
5. Déterminer la valeur d'expressions utilisant les fonctions cyclométriques.
6. Tracer le graphe de fonctions à partir des graphes des fonctions cyclométriques.
7. Déterminer le domaine de définition de fonctions.
8. Evaluer les nombres trigonométriques des fonctions cyclométriques.
9. Vérifier des identités.
10. Résoudre des équations.
11. Calculer des limites.
12. Etudier une fonction.
13. Résoudre un problème.

A. Activité : Devinette...



Les anciens Hindous adoraient les énigmes de calcul. Le célèbre Aryabhata faisait partie de ces amateurs. Voici un exemple de ce qu'il aurait pu écrire :

Choisir secrètement un nombre naturel entre 1 et 10 et faire mentalement les opérations suivantes :

- le multiplier par 4,
- ajouter 6 au résultat précédent,
- diviser par 2,
- retirer 5 et donner maintenant le résultat.

Aryabhata aurait pu deviner le nombre choisi au départ rien qu'en connaissant la réponse finale. Par exemple, si la réponse était 14, c'est que son interlocuteur avait choisi le nombre 8 au départ. Si la réponse était 10, c'est qu'il était parti de 6. Si la réponse était 15 ou 20, c'est que son interlocuteur s'était trompé dans ses calculs ou qu'il avait pris un nombre plus grand que 10 !

Comment s'y serait-il pris ?

Complète le tableau ci-dessous, reprenant les différentes étapes de calcul à faire par celui qui est interrogé.

Instructions verbales	**Calcul numérique**	**Fonction**
Choisir un nombre entre 1 et 10	8	x
Multiplier par 4		$4x$
Ajouter 6		
Diviser par 2		
Retirer 5	14	

Travaille "à l'envers", c'est-à-dire partir de la réponse et revenir au nombre de départ.

Instructions verbales	**Calcul numérique**	**Fonction**
Nombre trouvé	14	x
Ajouter 5	19	$x+5$
	8	

Vérifie que 10 est bien la réponse obtenue en partant du nombre 6.

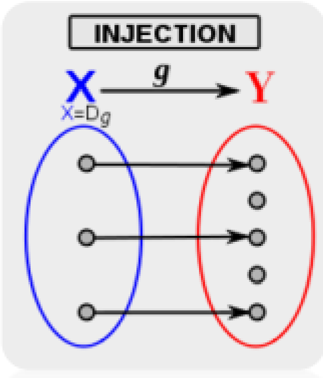
Pourquoi les nombres 15 et 20 sont-ils impossibles ?

Les deux relations ainsi déterminées sont réciproques l'une de l'autre.

Chacun peut, sur un modèle identique, inventer sa propre énigme de calcul !...

B. Fonctions réciproques

1. Injection, surjection, bijection

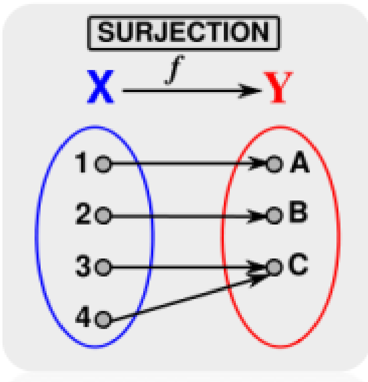


Définition : Une fonction de X dans Y est **injective** si et seulement si tout élément de Y possède au plus un antécédent dans X.

En notation mathématique, on a :

$$\forall x_1, x_2 \in X : g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

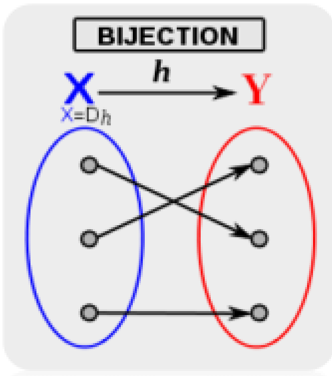
En d'autres termes, deux réels distincts ont toujours des images distinctes.



Définition : Une fonction de X dans Y est **surjective** si et seulement si tout élément de Y possède au moins un antécédent dans X.

En notation mathématique, on a :

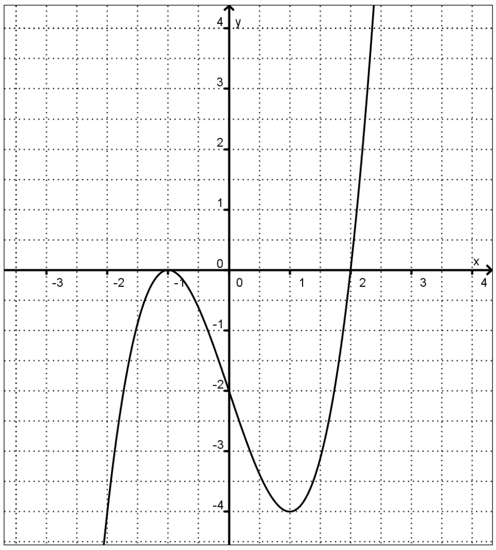
$$\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$$



Définition : Une fonction est dite **bijective** si et seulement si elle est injective et surjective.

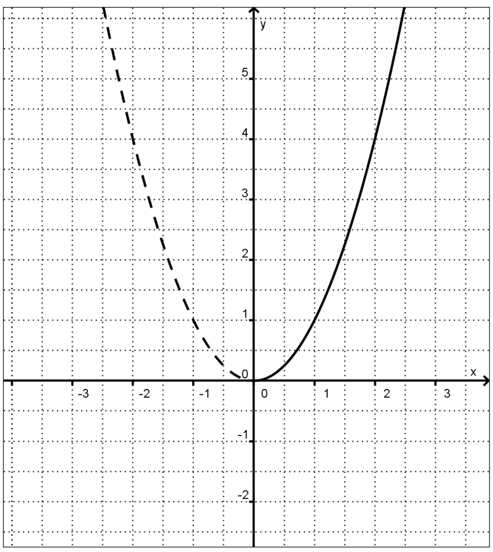
Exemples :

$$f(x)=(x+1)^2(x-2)$$



Ce n'est pas une bijection car pour $y=0$, on a deux valeurs de x $(x=-1 \text{ et } x=2)$.

$$f(x)=x^2$$



$y=x^2$ n'est pas une bijection.

Par contre, si on restreint son domaine de définition à $\mathbb{R}^+$, elle le devient.

2. Relation réciproque

Définition : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On appelle **relation réciproque** de la fonction f la relation de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément x de $\operatorname{Im} f$ fait correspondre le ou les éléments y de $dom\, f$ tels que $f(y) = x$.

Propriété : Si f est injective, alors la relation réciproque de f est une fonction.

En tel cas, on parlera de **fonction réciproque**.

Notation : La fonction réciproque d’une fonction f est notée f^{-1}.

A ne pas confondre avec l’inverse de f.

RECIPROQUE D’UNE FONCTION

https://bit.ly/3zlufXQ

3. Expression analytique de la réciproque d'une fonction

Dans les cas simples, pour trouver l'expression analytique de la fonction réciproque, il suffit de permuter x et y, puis d'exprimer y en fonction de x.

<u>Exemple :</u> Soit $f(x) = 2x + 3$.

Recherchons l'expression analytique de f^{-1} :

$y = 2x + 3$	on part de l'expression de f
$x = 2y + 3$	on permute x et y
$y = \dfrac{x-3}{2}$	on isole y

On a alors $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$.

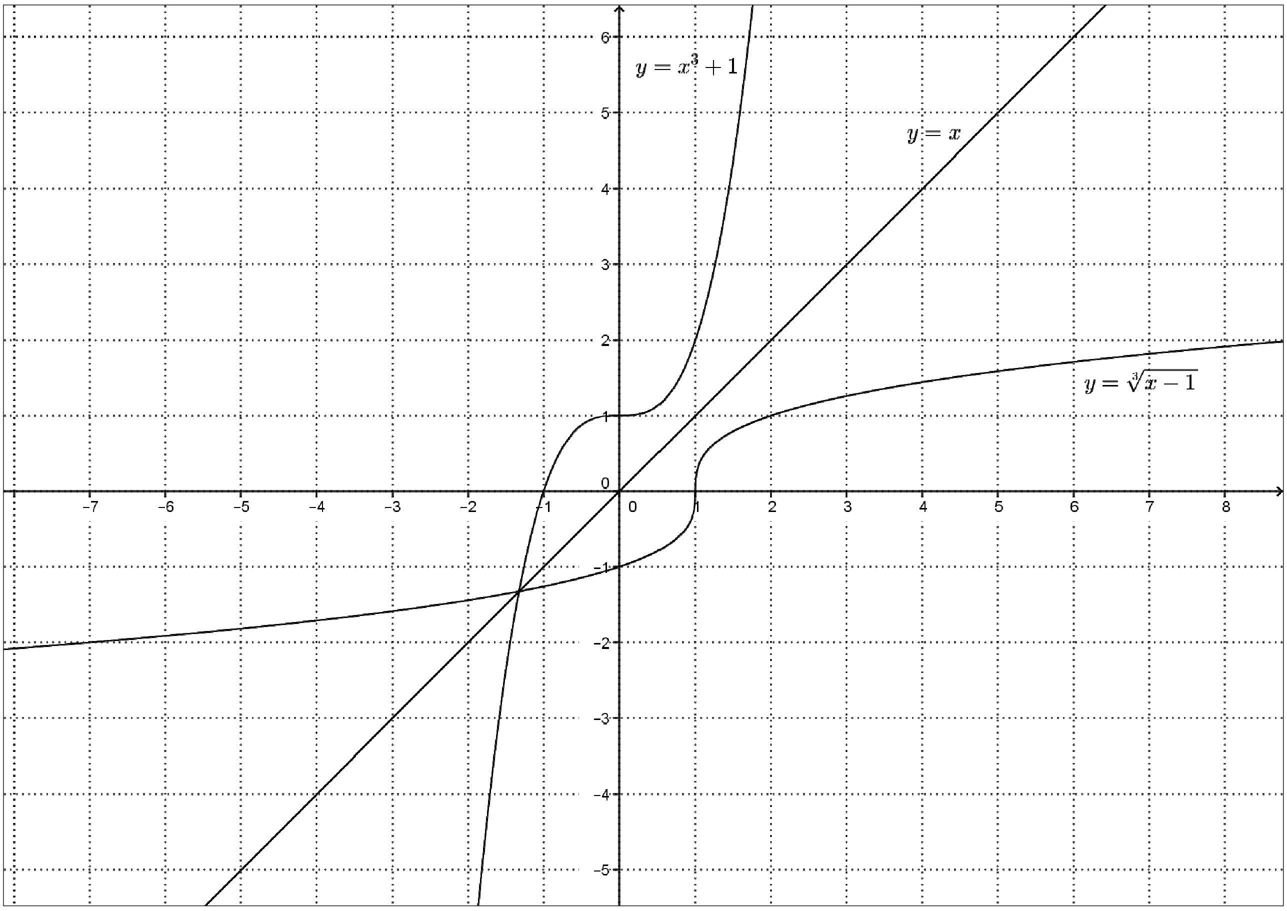
EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA RECIPROQUE D'UNE FONCTION

https://bit.ly/3gtCSYY

4. Lien entre les graphiques d'une fonction et de sa réciproque

Pour tracer le graphique de la réciproque d'une fonction f, on permute l'abscisse et l'ordonnée des points du graphique de f.

Dans un repère orthonormé, les graphiques d'une fonction et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, appelée **première bissectrice**.



Puisque dans un repère orthonormé, les graphiques d'une fonction et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice, les domaines et les ensembles-images vérifient les égalités suivantes :

$$dom\ f^{-1} = \operatorname{Im} f$$
$$\operatorname{Im} f^{-1} = dom\ f$$

LIEN ENTRE LES GRAPHIQUES D'UNE FONCTION ET DE SA RECIPROQUE

https://bit.ly/3khDwd2

5. Restriction

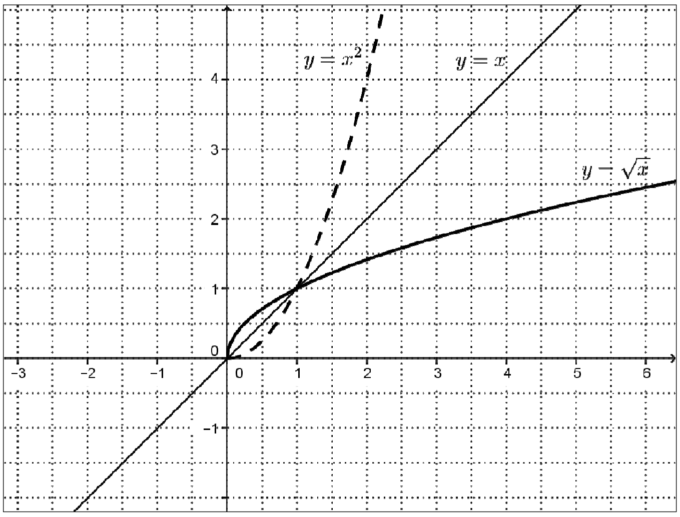
Soit la fonction f définie par $y = x^2$. En permutant x et y on a : $x = y^2$.

On isole y et on obtient $y = \pm\sqrt{x}$.

La réciproque de $y = x^2$ n'est donc pas une fonction !

Toutefois, en restreignant le domaine de la fonction f à un intervalle sur lequel deux réels différents ont des images distinctes, on obtient une fonction injective dont la réciproque est une fonction.

On restreint donc la fonction sur $\mathbb{R}^+$. On note $dom\, f_r = \mathbb{R}^+$.



6. Lien entre les dérivées de fonctions réciproques

La dérivée d'une fonction réciproque peut être facile à déterminer par les règles de calcul habituelles.

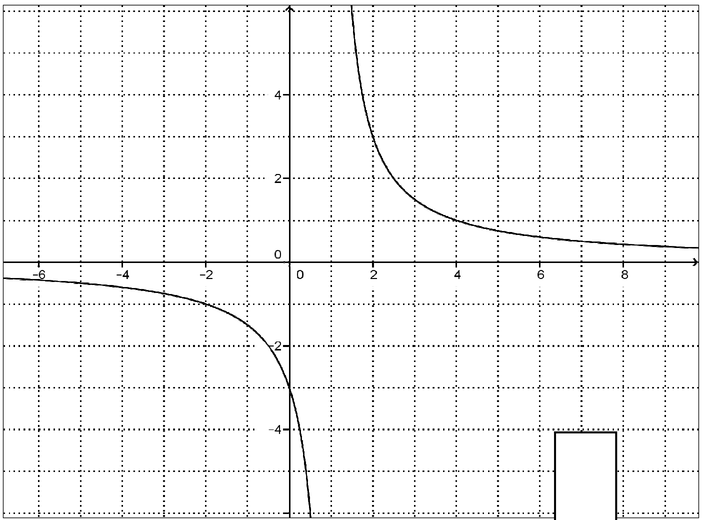
Cependant la dérivée d'une fonction réciproque f^{-1} peut aussi être déterminée à partir de la dérivée de la fonction f.

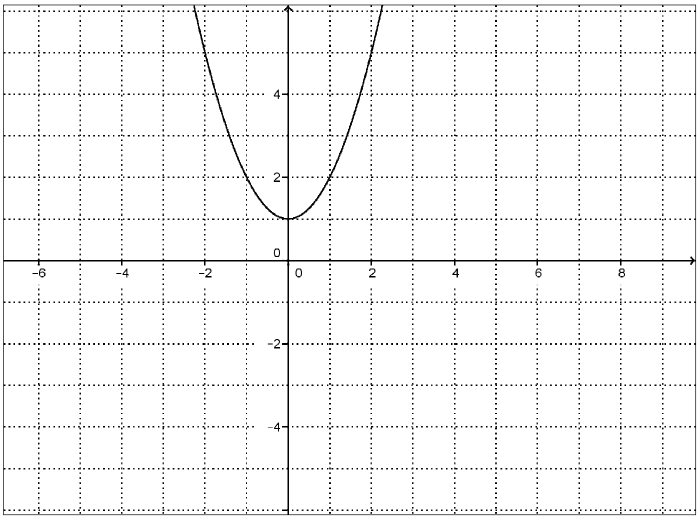
> Théorème : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, injective. Soit $x \in dom\, f^{-1}$.
>
> Si f est dérivable en $f^{-1}(x)$ et si $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$, alors
>
> $$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

7. Exercices

https://bit.ly/44g6vTx

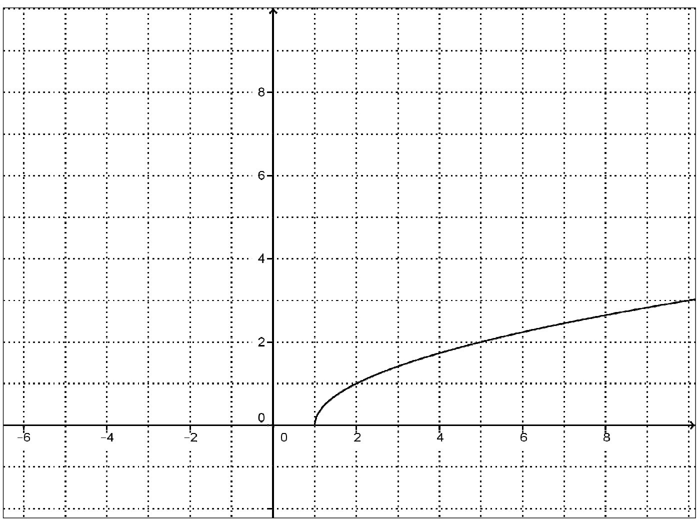
1. Trace le graphique de la réciproque de chacune des fonctions ci-dessous. Donne l'expression analytique de chaque réciproque et précise si cette réciproque est une fonction.





Comment déterminer l'expression analytique d'une fonction homographique à partir de son graphique ?

https://bit.ly/3gukmiQ



2. On considère la fonction $f(x)=\dfrac{4x+2}{2x+4}$.

   (1) Trace son graphique avec précision dans un repère orthonormé.

   (2) Trace sa réciproque dans ce même repère.

   (3) Détermine une expression analytique de $f^{-1}(x)$.

   (4) Cette réciproque est-elle une fonction ? Justifie.

Comment tracer le graphique d'une fonction homographique ?

https://bit.ly/3jihJTn

3. Détermine le domaine de définition et l'ensemble-image des fonctions suivantes. Précise si elles sont injectives et donne, le cas échéant, leur fonction réciproque. Dans le cas contraire, restreins le domaine de ces fonctions de manière à obtenir une fonction injective et détermine alors également la fonction réciproque.

   (1) $f(x)=2x+7$

   (2) $f(x)=x^2+2$

   (3) $f(x)=\sqrt{4x-3}$

   (4) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

   (5) $f(x)=2x^2-10x+6$

   (6) $f(x)=\dfrac{5x-2}{3x+2}$

   (7) $f(x)=4-\sqrt{x-2}$

   (8) $f(x)=7+\sqrt[3]{2x+3}$

Besoin d'aide pour les exercices (5) et (6) ?

Expression analytique de la reciproque d'une fonction

https://bit.ly/3gtCSYY

4. Soit la fonction $f(x)=\frac{1}{2}x^3+3x-4$. En particulier, on a $f(-2)=-14$.

   On note h la fonction réciproque de f. Calcule $h'(-14)$.

5. Soit la fonction $h(x)=\frac{1}{4}x^3+2x-1$ et g, sa fonction réciproque. On a $h(2)=5$.

   Que vaut $g'(5)$?

6. Soit g et h deux fonctions réciproques l'une de l'autre. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	$g(x)$	$h(x)$	$g'(x)$
3	5	4	$-\frac{1}{4}$
4	3	1	$\frac{1}{2}$

   Calcule $h'(3)$.

7. Les fonctions f et h sont des fonctions réciproques.

   On donne les valeurs des fonctions f et h et de la dérivée f' en -4 et en 1.

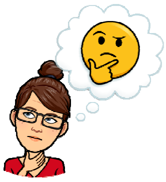
x	$f(x)$	$h(x)$	$f'(x)$
-4	2	1	$\frac{1}{3}$
1	-4	-2	4

   Calcule $h'(-4)$.

8. *Google Form* : « Fonctions réciproques »

   https://forms.gle/cDFW9RMwXZWtWJqR7

Pour chercher :



1. Détermine la fonction réciproque de la fonction $f\left(x\right)=\frac{x}{5-2x^2}$ $\forall x \neq 0$.

2. La réciproque d'une fonction du premier degré $f\left(x\right)=mx+p$ est-elle encore une fonction du premier degré ?
   Si oui, la fonction f et sa réciproque sont-elles représentées par des droites parallèles, perpendiculaires ou ni l'un ni l'autre ?

3. La réciproque d'une fonction homographique de la forme $f\left(x\right)=\frac{ax+b}{bx+a}$ est-elle toujours de la forme $f^{-1}\left(x\right)=\frac{-ax+b}{bx-a}$? Justifie ta réponse.

C. Fonctions cyclométriques

Les fonctions trigonométriques sont des fonctions périodiques, elles ne sont donc pas injectives.

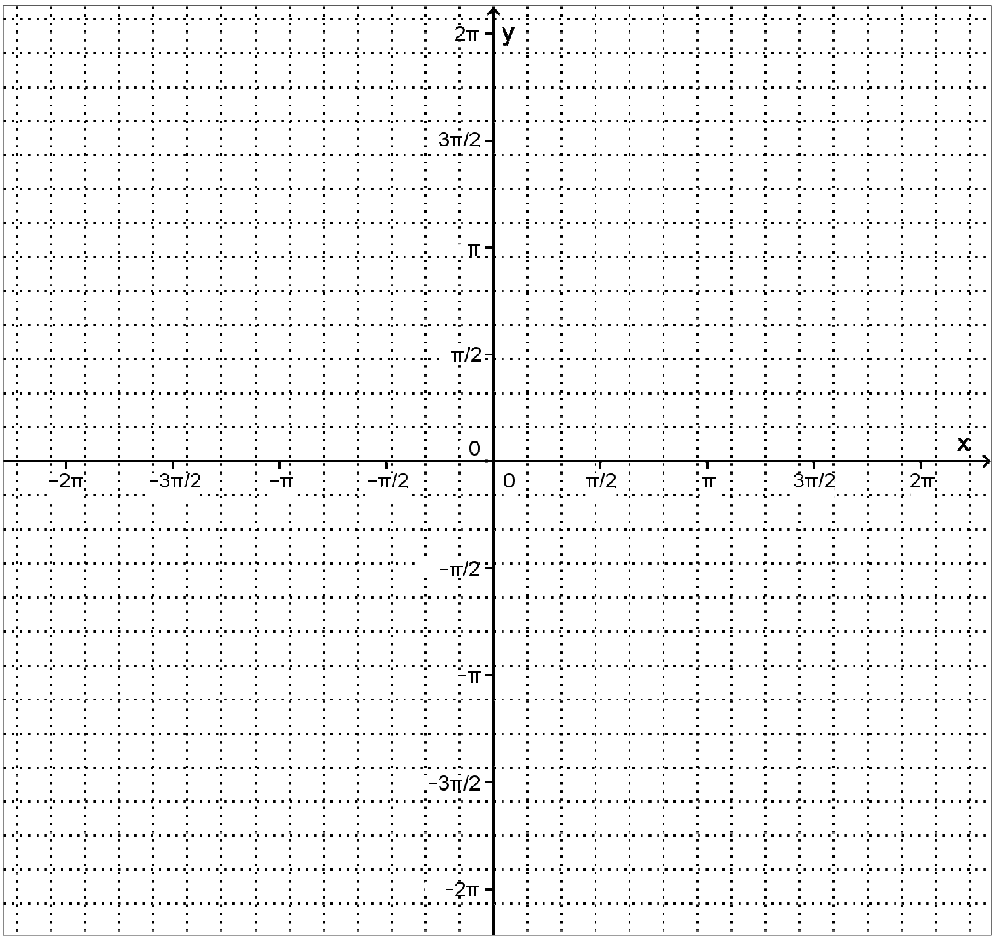
Pour obtenir des réciproques qui soient des fonctions, nous devrons, dans chaque cas, prendre une restriction, c'est-à-dire les étudier sur un intervalle inclus dans leur domaine où elles sont injectives.

Les fonctions réciproques des restrictions des fonctions trigonométriques sont appelées **fonctions cyclométriques**.

1. Fonction arcsinus

(1) Activité

Dessine le graphe de la fonction sinus et celui de sa réciproque dans le repère ci-dessous :



La réciproque de la fonction sinus est-elle une fonction ? ....

On doit donc restreindre la fonction sinus sur un intervalle où la fonction est bijective. On a choisi l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. A noter, que ce n'était pas le seul choix possible.

Quels sont alors le domaine de définition et l'ensemble-image de cette fonction réciproque ?

....

(2) Définition

On vient de voir que la réciproque de la fonction sinus : $\mathbb{R} \to [-1;1]$ n'est pas une fonction. On restreint alors la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Cette restriction est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$.

Sa réciproque est également une bijection de $[-1;1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Elle est nommée **arcsinus** et notée arcsin ou $\sin^{-1}$, pour rappeler qu'il s'agit de la réciproque de la fonction sinus.

Définition : $\arcsin : [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] : x \mapsto \arcsin x$ tel que

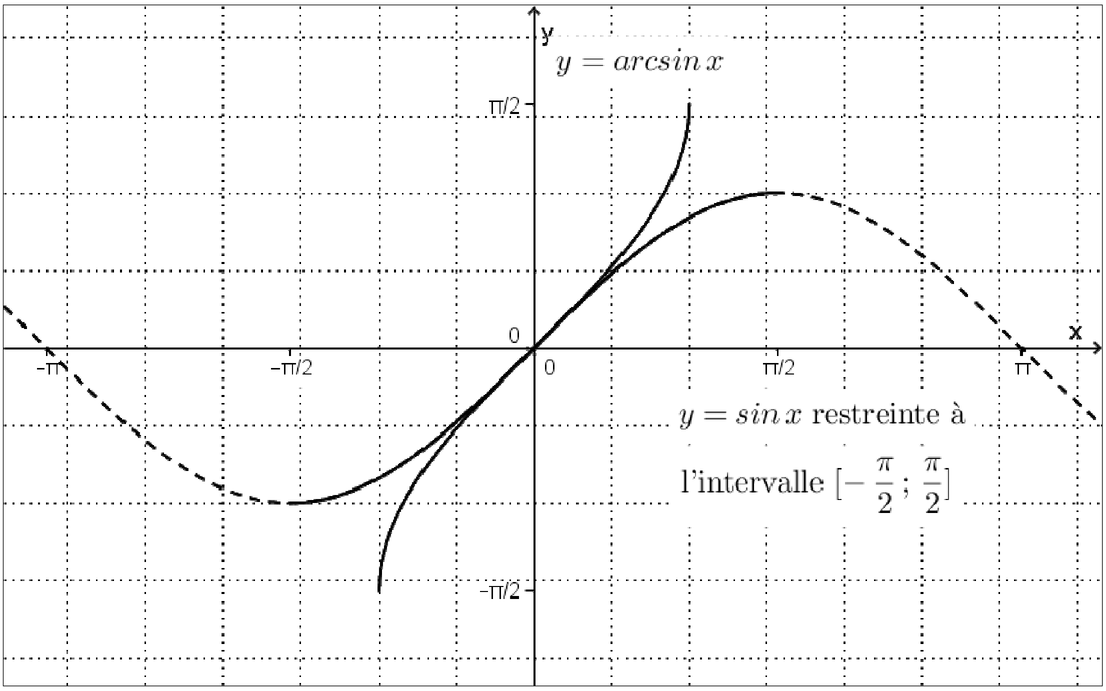
$\arcsin x = y \;\Leftrightarrow\; x = \sin y$ et $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

Exemples : (1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3}$ est l'amplitude en radians, comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, de l'angle dont le sinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\arcsin 0 = 0$

(3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, le graphe cartésien de la fonction arcsinus est le symétrique du graphe cartésien de la restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par rapport à la première bissectrice du repère.



On observe sur le graphique que la fonction arcsinus est impaire : $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Sa racine est $x = 0$.

Cette fonction est croissante, continue sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;1[$.

De plus, $\forall x \in [-1;1] : \sin(\arcsin x) = x$ et $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] : \arcsin(\sin x) = x$

De ces deux propriétés, on peut déduire que

$\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

Toutefois, il faudra être attentif au domaine de validité de ces propriétés.

Ainsi, $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) \neq \frac{2\pi}{3}$ car $\frac{2\pi}{3} \notin \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

On aura plutôt $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

FONCTION ARCSINUS

[HTTPS://BIT.LY/38DS24A](https://bit.ly/38ds24a)

(3) Dérivée

<u>Propriété :</u> La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1;1[$.

Pour tout x de $]-1;1[$, $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>Démonstration :</u>

La démonstration en vidéo : « Dérivée de la fonction arcsinus ».

https://bit.ly/3sJt6H0

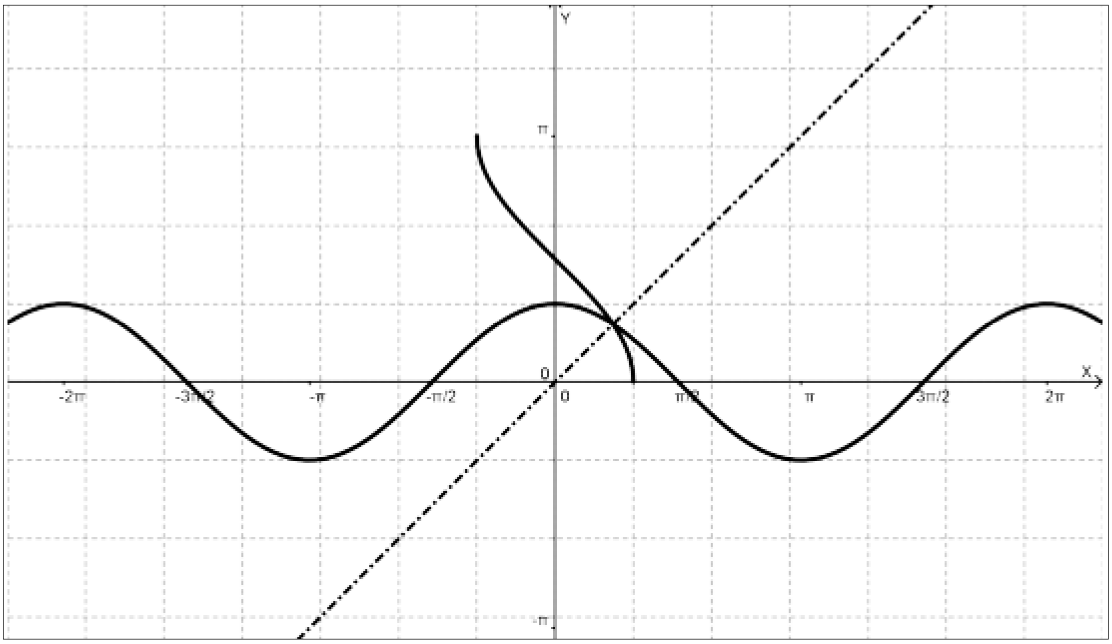
De plus, le théorème de dérivation des fonctions composées nous permet d'écrire :

$$\left[\arcsin\left(f(x)\right)\right]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

2. Fonction arccosinus

(1) Activité

Sur le graphique ci-dessous est représenté le graphe de la fonction cosinus et de sa réciproque...



Sur quel domaine la fonction cosinus a-t-elle été restreinte afin que sa réciproque soit une fonction ? ....

Quels sont alors le domaine de définition et l'ensemble-image de cette fonction réciproque ?

....

(2) Définition

La réciproque de la fonction cosinus : $\mathbb{R} \to [-1;1]$ n'est pas une fonction. On restreint alors la fonction cosinus à $[0;\pi]$. Cette restriction est une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$.

Sa réciproque est également une bijection de $[-1;1]$ sur $[0;\pi]$. Elle est nommée **arccosinus** et notée arccos ou $\cos^{-1}$, pour rappeler qu'il s'agit de la réciproque de la fonction cosinus.

<u>Définition :</u> $\arccos : [-1;1] \to [0;\pi] : x \mapsto \arccos x$ tel que

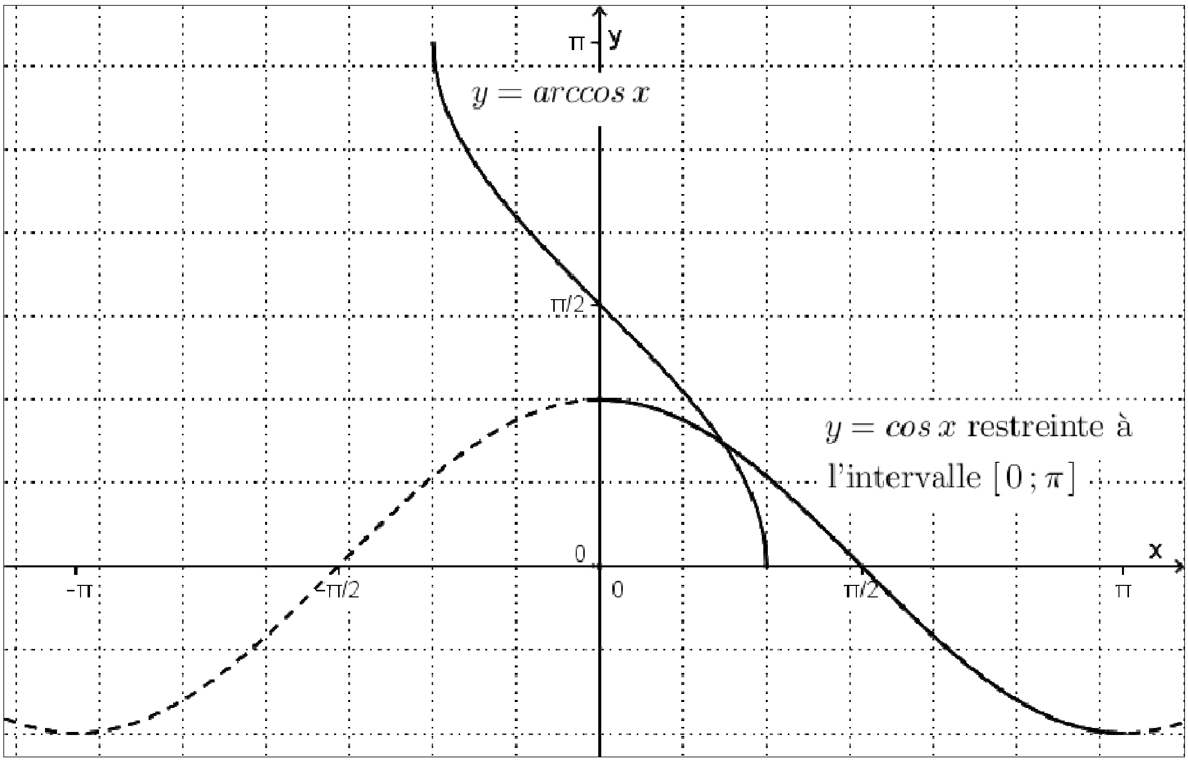
$\arccos x = y \;\Leftrightarrow\; x = \cos y$ et $0 \le y \le \pi$

Exemples : (1) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ car $\frac{\pi}{2}$ est l'amplitude en radians, comprise entre 0 et π , de l'angle dont le cosinus vaut 0.

(2) $\arccos(-1) = \pi$

(3) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, le graphe cartésien de la fonction arccosinus est le symétrique du graphe cartésien de la restriction de la fonction cosinus à $[0;\pi]$ par rapport à la première bissectrice du repère.



On observe sur le graphique que la fonction arccosinus n'est ni paire, ni impaire, elle est quelconque.

Sa racine est $x = 1$.

Cette fonction est décroissante, continue sur $[-1;1]$, dérivable sur $]-1;1[$ et positive.

De plus, $\forall x \in [-1;1] : \cos(\arccos x) = x$ et $\forall x \in [0;\pi] : \arccos(\cos x) = x$

De ces deux propriétés, on peut déduire que

$$\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \arccos\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Toutefois, il faudra être attentif au domaine de validité de ces propriétés.

Ainsi, $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \neq -\frac{\pi}{6}$ car $-\frac{\pi}{6} \notin [0;\pi]$.

On aura plutôt $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6} \in [0;\pi]$.

FONCTION ARCCOSINUS

[*HTTPS://BIT.LY/3BA1NLE*](https://bit.ly/3Ba1nlE)

(3) Dérivée

Propriété : La fonction arccosinus est dérivable sur $]-1;1[$.

Pour tout x de $]-1;1[$, $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démonstration :

La démonstration en vidéo : « Dérivée de la fonction arccosinus ».

https://bit.ly/2WsHurf

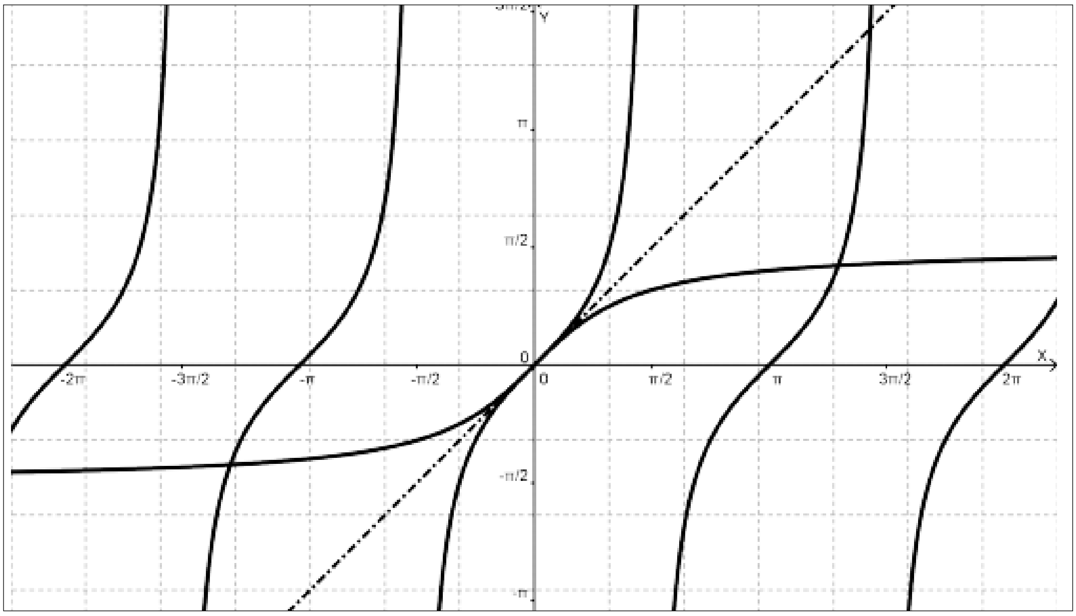
De plus, le théorème de dérivation des fonctions composées nous permet d'écrire :

$$\left[\arccos(f(x))\right]' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

3. Fonction arctangente

(1) Activité

Sur le graphique ci-dessous est représenté le graphe de la fonction tangente et de sa réciproque...



Sur quel domaine la fonction tangente a-t-elle été restreinte afin que sa réciproque soit une fonction ? ....

Quels sont alors le domaine de définition et l'ensemble-image de cette fonction réciproque ?

....

(2) Définition

La réciproque de la fonction tangente : $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ n'est pas une fonction. On restreint alors la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Cette restriction est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Sa réciproque est également une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Elle est nommée **arctangente** et notée arctan ou $\tan^{-1}$, pour rappeler qu'il s'agit de la réciproque de la fonction tangente.

Définition : $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[: x \mapsto \arctan x$ tel que

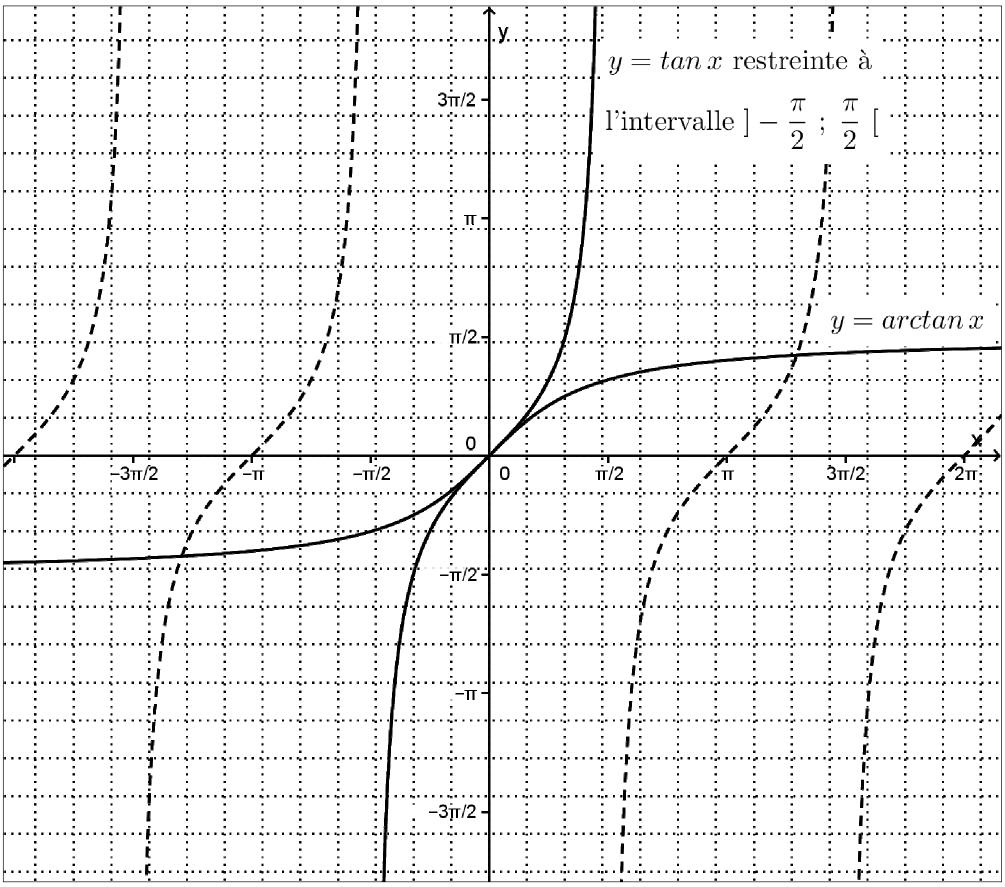
$\arctan x = y \iff x = \tan y$ et $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Exemples : (1) $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ car $-\frac{\pi}{4}$ est l'amplitude en radians, strictement comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, de l'angle dont la tangente vaut -1.

(2) $\arctan 0 = 0$

(3) $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, le graphe cartésien de la fonction arctangente est le symétrique du graphe cartésien de la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par rapport à la première bissectrice du repère.



On observe sur le graphique que la fonction arctangente est impaire : $\arctan(-x) = -\arctan x$.

Sa racine est $x = 0$.

Cette fonction est croissante, continue et dérivable.

On observe également que :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2}$ est asymptote horizontale au graphe de $f(x) = \arctan x$ en $+\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \Rightarrow y = -\dfrac{\pi}{2}$ est asymptote horizontale au graphe de $f(x) = \arctan x$ en $-\infty$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R} : \tan(\arctan x) = x$ et $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[: \arctan(\tan x) = x$

De ces deux propriétés, on peut déduire que

$\tan\left(\arctan\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$ et $\arctan\left(\tan\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Toutefois, il faudra être attentif au domaine de validité de ces propriétés.

Ainsi, $\arctan\left(\tan\dfrac{2\pi}{3}\right) \neq \dfrac{2\pi}{3}$ car $\dfrac{2\pi}{3} \notin \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On aura plutôt $\arctan\left(\tan\dfrac{2\pi}{3}\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3} \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

FONCTION ARCTANGENTE

HTTPS://BIT.LY/3BJIB5D

(3) Dérivée

Propriété : La fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration :

De plus, le théorème de dérivation des fonctions composées nous permet d'écrire :

$$\left[\arctan\left(f(x)\right)\right]' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

4. Règle de l'Hospital

La règle de l'Hospital, bien qu'elle ait été découverte par le mathématicien suisse Bernoulli (1667-1748), permet de lever des indéterminations dans le calcul de certaines limites.

Propriété : Si f et g sont deux fonctions continues et dérivables en a telles que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Démonstration :

<u>Exemple :</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{2x} =$

Le saviez-vous ?

La règle de l'Hospital…une supercherie

G. de l'Hospital
(1661-1704)

Officier de cavalerie, Guillaume de l'Hospital, marquis de Saint-Mesme, fut très apprécié par ses contemporains. Il publia en 1696 « l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes ». Cet ouvrage, premier du genre, contribua largement à promouvoir les méthodes du calcul infinitésimal de l'allemand Gottfried Leibniz.

Il défendit cet algorithme contre les attaques d'un autre mathématicien français, Michel Rolle (1652-1719) qui publia des travaux d'algèbre et d'analyse et qui considérait les nouvelles méthodes de calcul infinitésimal dues à Leibniz comme « une collection d'illusions trompeuses ».

G. Leibniz

M. Rolle
(1652-1719)

Beaucoup de contemporains ignorèrent que le mathématicien aristocrate avait passé avec le suisse Jean Bernoulli un contrat de publication des travaux de ce dernier.

Ce n'est que bien après la mort du français que Bernoulli constata que son collègue avait publié plusieurs de ses découvertes sous le nom de Guillaume de l'Hospital. Ainsi, donc, la célèbre règle de levée de certaines indéterminations n'est pas de lui mais bien de… Bernoulli.

J. Bernoulli
(1667-1748)

5. Exercices

https://bit.ly/45ixejM

1. Détermine la valeur des expressions suivantes en radians, sans calculatrice.

   (1) $\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   (2) $\arcsin(-0,5)$

   (3) $\arctan 1$

   (4) $\arcsin\left(\sin \dfrac{5\pi}{4}\right)$

   (5) $\arccos\left(\sin \dfrac{5\pi}{4}\right)$

   (6) $\arctan\left(\tan \dfrac{\pi}{3}\right)$

2. Trace le graphe des fonctions suivantes au départ des fonctions usuelles et détermine leurs domaine, racine(s), ensemble-image et éventuelles asymptotes :

   (1) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

   (2) $f(x) = \arcsin(2x+2)$

   (3) $f(x) = \arccos(x-1)$

   (4) $f(x) = 2\arctan(x+2)$

   (5) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$

   (6) $f(x) = \arccos x + 1$

3. Détermine une expression analytique de la réciproque des fonctions suivantes :

   (1) $f(x) = 3.\sin(2x)+1$

   (2) $f(x) = \arccos(3x)-4$

   (3) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2}{5}x\right)$

4. Donne les conditions d'existence, le domaine de définition, la(les) racine(s) et la dérivée des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \arcsin(2x)$

(2) $f(x) = \arcsin(x+1)$

(3) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(4) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{2x+3}{x-2}\right)$

(5) $f(x) = \sqrt{x^2-1} + \arcsin x$

(6) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

5. (1) Si $y = \arcsin x$, que valent $\sin y, \cos y, \tan y$?

(2) Si $y = \arccos x$, que valent $\cos y, \sin y, \tan y$?

(3) Si $y = \arctan x$, que valent $\tan y, \sin y, \cos y$?

Astuce : On utilise un triangle rectangle et les nombres trigonométriques, avec la « formule » SOHCAHTOA.

L'exercice (1) en vidéo : « Calculer les nombres trigonométriques d'un nombre cyclométrique ».

https://bit.ly/2WpKrst

6. Vérifie les identités suivantes (sans calculatrice) :

(1) $\forall x \in [-1;1]: \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

(2) $\arctan \dfrac{1}{2} + \arctan \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

(3) $\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

(4) $\arctan \dfrac{1}{5} + \arctan \dfrac{1}{2} + \arctan \dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

Astuce : On « injecte » une fonction trigonométrique de part et d'autre de l'égalité.

L'exercice (1) en vidéo : « Vérifier une identité cyclométrique ».

https://youtu.be/dC_FwV5VGsY

7. Résous les équations suivantes :

(1) $\arcsin(2x+4) = 0$

(2) $\arccos(2x) + 4 = 0$

(3) $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \dfrac{\pi}{4}$

(4) $\arcsin 2x = \dfrac{\pi}{4} + \arcsin x$

(5) $\arcsin \dfrac{3}{5} + \arcsin \dfrac{4}{5} = x$

(6) $\arccos x = 2.\arccos\left(\dfrac{3}{4}\right)$

(7) $\arccos(2x) - \arccos x = \dfrac{\pi}{3}$ *(ULB,Juillet 2015)*

Astuce : On « injecte » une fonction trigonométrique de part et d'autre de l'égalité. Mais cette méthode introduit des solutions parasites car les fonctions trigonométriques ne sont pas injectives.

L'exercice (3) en vidéo : « Résoudre une équation cyclométrique »

https://bit.ly/3muhne7

« Résoudre une équation irrationnelle » (contenant au moins une racine carrée)

https://bit.ly/3mBeOaf

8. Détermine une équation réduite de la tangente à la courbe d'équation $y = 2\arccos\left(x^2 - 2x\right)$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

9. Calcule les limites suivantes et donnes-en une interprétation graphique :

(1) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2} + 2\cos x}{\tan^2 x - 1}$

(2) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \arcsin\left(2x - 1\right)$

(3) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \arccos\left(1 - x\right)$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\arctan 2x}$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x.\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-2x}{\sin^3 x}$

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}}\dfrac{\arccos x-\arcsin x}{x^2-\frac{1}{2}}$

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\arccos x}{\arcsin x}$

10. Recherche les équations des asymptotes de la fonction $f\left(x\right)=x^2.\arctan\dfrac{1}{1+x}$.

11. Fais l'étude complète de la fonction $f\left(x\right)=\arctan\left(\dfrac{-x}{x+2}\right)$ (domaine, parité, intersection avec les axes, asymptotes, dérivée première et croissance, dérivée seconde et concavité, tableau récapitulatif, graphique)

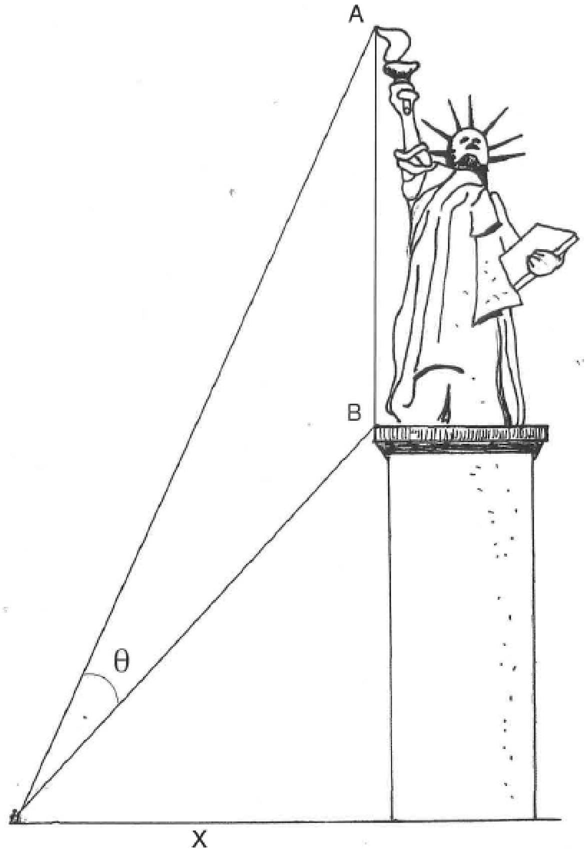
12. Lors d'une exposition de peinture, un amateur d'art observe un tableau d'une hauteur de 2,8 m suspendu à 1,2 m du sol. Les yeux de l'observateur sont à 1,7 m du sol. A quelle distance du mur doit-il se tenir s'il veut observer le tableau sous un angle de vision de 45° ?

13. Un photographe cherche à déterminer la distance x à laquelle il doit placer son appareil pour prendre une photo de la statue de la liberté sous un angle θ maximal.

On admet que θ est compris entre 0° et 90°.

Voici les conditions à respecter :

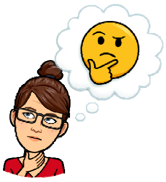
- l'appareil photo est à 1,5 m du sol ;
- le piédestal a pour hauteur 45 m ;
- la statue mesure également 45 m de hauteur.



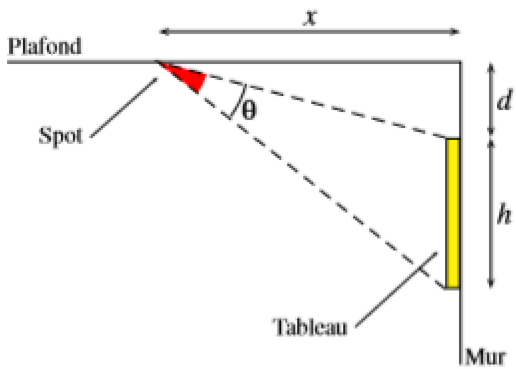
14. *GOOGLE FORM* : « Fonctions cyclométriques »

https://forms.gle/hnhamDRtQuKvTAnm7

Pour chercher :



1. On désire éclairer, au moyen d'un spot unique fixé au plafond, un tableau de hauteur $h \neq 0$ suspendu au mur, comme illustré ci-dessous. On considère une approche bidimensionnelle. On note d la distance (mesurée verticalement) entre le dessus du tableau et le plafond et x la distance (mesurée horizontalement) entre le spot et le mur.



L'angle θ que doit couvrir le spot pour éclairer le tableau dépend de la distance x par la relation $\theta(x) = \arctan\left(\frac{d+h}{x}\right) - \arctan\left(\frac{d}{x}\right)$.

(1) Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} \theta(x)$ en discutant s'il y a lieu en fonction des paramètres d et h.

(2) En considérant d et h comme des paramètres fixés, détermine la valeur maximale de l'angle θ et exprime cette valeur en fonction de d et h.

2. Etudie la fonction $f(x) = \arctan \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ en discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs du paramètre $a \geq 0$. En particulier, détermine

   (1) le domaine de définition de f

   (2) les asymptotes éventuelles

   (3) croissance / décroissance / extrema

   (4) concavité / points d'inflexion

   (5) Esquisse le graphe de f.

(d'après *Examen d'admission, ULg, 2002*)